

**Шәһәр күләмендә математика фәнненән татар телендә үткәрелә торган
олимпиаданың йомгаклау этабы җаваплары
2023-2024 нче уку елы
9 нчы сыйныф**

**Эш вакыты – 180 минут
Гомуми балл – 25**

1. Төгәл 47 кисешү ноктасы килеп чыгарлык итеп 12 туры уздырыгыз.

Чишү. 3, 4 һәм 5 әр параллель турыдан торган 3 төркем ясыйбыз. Группа әчендә кисешүләр юк. с k һәм m группа арасында $k \times m$ кисешү. Парлы төркемнәр өчәү. Барлыгы: $3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 47$ кисешү.

Критерийлар: (а) мисал ясалган (яисә тулы аңлатма китерелгән) һәм кисешүләр саны нәкъ 47 булуы нигезләнгән - тулы балл (5 балл). (б) мисал ясалган (яисә тулы аңлатма китерелгән), әмма кисешүләр саны нәкъ 47 булуы нигезләнмәгән - 4 балл.

2. 125 000 027 саны гади сан булып торамы? Нәкъ ике бүлүчәсе булган натураль сан - гади сан дип атала. Беренчәсе ул үзе, ә икенчәсе берле саны.

Чишү: $125\,000\,027 = 1\,000\,000\,000 + 27 = 1000^3 - 3^3 = 997 \cdot (1000^2 + 1000 \cdot 3 + 3^2)$. Димәк, бу кушма сан.

Критерийлар: (а) Бары җавап китерелгән — 0 балл. (б) Сан үзенә һәм берле санына тигез булмаган төзүчеләргә таркатылган (формула куллану мәҗбүри тугел, төзүчеләргә, сайлап карау алымын кулланып, таркатылган булырга мөмкин) — 5 балл.

3. ABC өчпочмагында почмак $C = 90^\circ$ тигез, ә AK һәм BL медианалары тиндәшле рәвештә $\sqrt{42}$ һәм $\sqrt{83}$ тигез. AB ның озынлыгын табыгыз.

Чишү. Пифагор теоремасн кулланып, $CK^2 = 42 - BC^2$, $CL^2 = 83 - AC^2$ билгелик. Шулай булгач $AB^2 = 4(CK^2 + CL^2) = 125 - AB^2$. Димәк, $AB = 10$.

Критерийлар. (а) Бары тик җавап (ABC өчен өстәмә шартларны кулланып, аерым очрак өчен табылган җавап) — 1 балл. (б) Алга таба аңлатуларсыз CK^2 һәм BL^2 билгеләнгән — 3 балл. (в) Нигезле рәвештә AB озынлыгы табылган — 5 балл.

4. Тигезсезлекне исбатлагыз: $7x^2 + y^2 + 4 \geq 7x + 3y$.

Чишү. $\frac{7}{4} \geq 7x(1 - x)$, $\frac{9}{4} \geq y(3 - y)$ булуын билгелик (мисал өчен, $x = \frac{1}{2}$ — тиндәшле параболаның түбәсе булганга, япыләре аска караган, $y = \frac{3}{2}$ өчен аналогиядә). Бу ике дәрәҗә тигезсезлекне үзара кушып, исбатланьрга тиешле тигезсезлекне китереп чагарабыз.

Критерийлар. (а) Тигезсезлек теләсә нинди x өчен исбатланган — 5 балл.

(б) Тигезсезлек бары тик уңай (тискәре) x өчен генә исбатланылган — 3

балл. (в) Исбатлауда алга таба фикер йөртүләр юк — 0 балл.

5. Бер-берсенә карата кире тәртиптә тезелгән бердәй цифралар белән язылган ике өчүрынлы санның суммасы 1252 гә тигез. Әгәр һәрберсенәң цифралары суммасы 14, ә цифраларының квадратлары суммасы 84 тигез булса, бу саннарны табыгыз.

Решение. Саннарның берсе $\overline{abc}$, $a > c$ булсын ди. Ул вакытта $101(a + c) + 20b = 1252$; $81(a + c) = 972$; $a + c = 12$; $b = 2$; $a^2 + c^2 = 80$; $2ac = 64$; $a - c = 4$; $a = 8$; $c = 4$. Димәк, саннар 824 һәм 428.

Критерии. (а) Бары тик җавап кына язылган — 1 балл. (б) Башка саннарның була алмавы исбатланылган җавап китерелгән — 5 балл.